TEMA 3: POLINOMIOS

1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Trabajar en **álgebra** consiste en manejar **relaciones numéricas** en las que una o más cantidades son **desconocidas**. Estas cantidades se llaman **variables, incógnitas o indeterminadas y se representan por letras**.

Una **expresión algebraica** es una combinación de letras y números ligadas por los signos de las operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

Las **expresiones algebraicas** nos permiten, por ejemplo, hallar áreas y volúmenes.

Longitud de la circunferencia: $L = 2\pi r$, donde r es el radio de la circunferencia.

Área del cuadrado: $S = l^2$, donde l es el lado del cuadrado.

Volumen del cubo: $V = a^3$, donde a es la arista del cubo.

Expresiones algebraicas comunes

El **doble o duplo** de un número: **$2x$**

El **triple** de un número: **$3x$**

El **cuádruplo** de un número: **$4x$**

La **mitad** de un número: **$x/2$.**

Un **tercio** de un número: **$x/3$.**

Un **cuarto** de un número: **$x/4$.**

Un número es **proporcional** a 2, 3, 4, ...: **$2x, 3x, 4x$,..**

Un número al **cuadrado**: **x^2**

Un número al **cubo**: **x^3**

Dos números **consecutivos**: **x** y **$x + 1$.**

Dos números **consecutivos pares**: **$2x$** y **$2x + 2$.**

Dos números **consecutivos impares**: **$2x + 1$** y **$2x + 3$**.

Descomponer 24 **en dos partes**: **x** y **$24 - x$.**

La **suma** de dos números es 24: **x** y **$24 - x$.**

La **diferencia** de dos números es 24: **x** y **$24 + x$.**

El **producto** de dos números es 24: **x** y **$24/x$.**

El **cociente** de dos números es 24; **x** y **$24 \cdot x$.**

Valor numérico de una expresión algebraica

El valor numérico de una expresión algebraica, para un determinado valor, es el número que se obtiene al sustituir en ésta la incógnita por el valor numérico dado y realizar las operaciones indicadas.

$L(r) = 2\pi r$

$r = 5$ cm. $\quad L(5) = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 10\pi$ cm

$S(l) = l^2$

$l = 5$ cm $\quad A(5) = 5^2 = 25$ cm^2

$V(a) = a^3$

$a = 5$ cm $\quad V(5) = 5^3 = 125$ cm^3

Tipos de expresiones algebraicas

- **Monomio.** Un monomio es una expresión algebraica formada por un solo término.
- **Binomio.** Un binomio es una expresión algebraica formada por dos términos.
- **Trinomio.** Un trinomio es una expresión algebraica formada por tres términos.
- **Polinomio.** Un polinomio es una expresión algebraica formada por más de un término.

2. MONOMIOS.

Un **monomio** es una **expresión algebraica** en la que las únicas **operaciones** que aparecen entre las variables son el **producto y la potencia de exponente natural**.
El **coeficiente** del monomio es el número que aparece multiplicando a las variables.
La **parte literal** está constituida por las letras y sus exponentes.
El **grado** de un monomio es la suma de todos los exponentes de las letras o variables.
Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal.

3. OPERACIONES CON MONOMIOS

Suma de Monomios

Sólo podemos sumar monomios semejantes.
La suma de los monomios es otro monomio que tiene la misma parte literal y cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes.

Producto de un número por un monomio

El producto de un número por un monomio es otro monomio semejante cuyo coeficiente es el producto del coeficiente de monomio por el número.

Producto de monomios

El producto de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando las potencias que tenga la misma base.

Cociente de monomios

El cociente de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el cociente de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene dividiendo las potencias que tenga la misma base.

4. POLINOMIOS

Un **POLINOMIO** es una expresión algebraica formada por la suma de varios monomios:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

Siendo a_n, a_{n-1} ... a_1 , a_o números, llamados coeficientes.
n un número natural.
x la variable o indeterminada.
a_o es el término independiente.

Grado de un polinomio

El grado de un polinomio P(x) es el mayor exponente al que se encuentra elevada la variable x.

Polinomio completo

Es aquel que tiene todos los términos desde el término independiente hasta el término de mayor grado

Polinomio ordenado

Un polinomio está ordenado si los monomios que lo forman están escritos de mayor a menor grado.

Valor numérico de un polinomio

Es el resultado que obtenemos al sustituir la variable x por un número cualquiera.

Raíces de un polinomio

Se denomina raíz de un polinomio P(x) a cualquier valor de x para el que el valor numérico del polinomio es cero.

$$X=a \text{ es una raíz de } P(x) \text{ si } P(a)=0$$

ACTIVIDADES

1. Describe las características del polinomio $P(x,y)= 7xy^2-5xy+6$, y halla su valor numérico para x=3 e y=2.
2. Halla las raíces del polinomio $P(x)=4x^2+x-39$

5. OPERACIONES CON POLINOMIOS

Suma de polinomios

Para sumar dos polinomios se suman los coeficientes de los términos del mismo grado.
La diferencia consiste en sumar el opuesto del sustraendo.

Multiplicación de polinomios

Producto de un número por un polinomio

Es otro polinomio que tiene de grado el mismo del polinomio y como coeficientes el producto de los coeficientes del polinomio por el número.

Producto de un monomio por un polinomio

Se multiplica el monomio por todos y cada uno de los monomios que forman el polinomio.

Producto de polinomios

1 Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos segundo polinomio.
2 Se suman los monomios del mismo grado.

Identidades notables

Binomio al cuadrado

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Suma por diferencia

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Binomio al cubo

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$$

División de polinomios

$P(x)$: $Q(x)$

A la izquierda situamos el dividendo. Si el polinomio no es completo dejamos huecos en los lugares que correspondan.

A la derecha situamos el divisor dentro de una caja.

Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.

Multiplicamos cada término del polinomio divisor por el resultado anterior y lo restamos del polinomio dividendo:

Volvemos a dividir el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor. Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.

Repetimos el proceso anterior hasta que el grado del resto sea menor que el grado del divisor, y por tanto no se puede continuar dividiendo.

Para comprobar si la operación es correcta, utilizaríamos la prueba de la división:

$D = d \cdot c + r$

Regla de Ruffini

Si el divisor es un binomio de la forma x — a, entonces utilizamos un método más breve para hacer la división, llamado REGLA DE RUFFINI.

$(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$

1. Si el polinomio no es completo, lo completamos añadiendo los términos que faltan con ceros.
2. Colocamos los coeficientes del dividendo en una línea.
3. Abajo a la izquierda colocamos el opuesto del término independiente del divisor.
4. Trazamos una raya y bajamos el primer coeficiente.

	1	0	-3	0	2
3					
	1				

5. Multiplicamos ese coeficiente por el divisor y lo colocamos debajo del siguiente término.

	1	0	-3	0	2
3		3			
	1				

6. Sumamos los dos coeficientes.

	1	0	-3	0	2
3		3			
	1	3			

7. Repetimos los pasos 5 y 6 las veces que fuera necesarias.
8. El último número obtenido es el resto.
9. El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al dividendo y cuyos coeficientes son los que hemos obtenido.

ACTIVIDADES

1. Dados los polinomios $P(x)=-x^3+x^2-3x-1$, $Q(x)=-3x^3-6x+3$ y $R(x)=x^3+2x^2$, realiza las siguientes operaciones:

   a) $P(x)-Q(x)+2R(x)$

   b) $-P(x)-2Q(x)+4R(x)$

   c) $2[P(x)-3Q(x)]+\frac{1}{2}R(x)$

   d) $\frac{3P(x)-2R(x)}{5}+Q(x)$

2. Simplifica todo lo que puedas $\frac{3}{2}(2x^2+4x-5)-2x^2-x-1)$
3. Los ingresos y los costes de una operación comercial vienen dados por los siguientes polinomios, donde x es el número de unidades producidas.

   $I(x)=-\frac{1}{4}x^2+6x+50$ $\qquad$ $C(x)=-\frac{1}{10}x^2+2x+20$

   a) Calcula la expresión que determina los beneficios
   b) Calcula los beneficios en el caso de que los costes se reduzcan a la mitad.
4. Realiza las siguientes operaciones

   a) $(3x^2+2x-5)(2x^2+x-3)$

   b) $(2x-3)(-2x^2+2)+x(-2x^2+x+1)$

5. Extrae factor común en la siguiente expresión:
   a) 2xa+ya-2xb-yb
   b) 2xa-4xb-3ya+6yb

6. Obtén la identidad notable referida al cubo de una suma

7. Simplifica todo lo que puedas

   a) $-4(2x-3)(2x+3)+3(2x-3)^2$

   b) $2x-3x(x^2-5)+(2-x)(-3x^2+6)$

   c) $2(3x-1)^2+5(3x-1)(3x+1)-4x(3x+2)^2$

8. Realiza las siguientes divisiones
   a) $(30x^4+3x^3-21x^2+3):(6x^2-3x)$
   b) $18x^5y^2z^4:6x^2y^2z^3$
   c) $8a^3d^2:2b^3c^2d^3$
   d) $(4x^3+2x^2-3x+5):(2x^2-3x+2)$

9. Calcula, mediante la regla de Ruffini, el cociente y el resto de la siguiente división.

$$(3x^4 + 2x^2 - x + 3) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

6. FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO

Teorema del resto

El resto de la división de un polinomio P(x), entre un polinomio de la forma x - a es el valor numérico de dicho polinomio para el valor: x = a.

Teorema del factor

El polinomio P(x) es divisible por un polinomio de la forma x - a si y sólo si P(x = a) = 0.

Al valor x = a se le llama RAÍZ o CERO de P(x).

ACTIVIDADES

1. Aplicando la regla de Ruffini, demuestra que el polinomio P(x) es divisible por (x+3). $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

2. Calcula el valor de k para que el polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 + kx + 4$ sea divisible por x+2.

Observaciones

1. Los ceros o raíces son divisores del término independiente del polinomio.
2. A cada raíz del tipo x = a le corresponde un binomio del tipo (x −a).
3. Podemos expresar un polinomio en factores al escribirlo como producto de todos los binomios del tipo x — a, que se correspondan a las raíces x = a que se obtengan.
4. La suma de los exponentes de los binomios ha de ser igual al grado del polinomio.
5. Todo polinomio que no tenga término independiente admite como raíz x = 0, ó lo que es lo mismo, admite como factor x.
6. Un polinomio se llama irreducible o primo cuando no puede descomponerse en factores.

Métodos para factorizar un polinomio

Sacar factor común

Consiste en aplicar la propiedad distributiva.

a · b + a · c + a · d = a (b + c + d)

Igualdades notables

Diferencia de cuadrados

Una diferencia de cuadrados es igual a suma por diferencia.

$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto es igual a un binomio al cuadrado.

$a^2 \pm 2\,a\,b + b^2 = (a \pm b)^2$

Trinomio de segundo grado

$a\,x^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Polinomio de grado superior a dos.

Utilizamos el teorema del resto y la regla de Ruffini.

1Tomamos los divisores del término independiente: **±1, ±2, ±3.**

2Aplicando el teorema del resto sabremos para que valores la división es exacta.

3Dividimos por Ruffini**.**

4Por ser la división exacta**,** D = d · c

5Continuamos realizando las mismas operaciones al segundo factor, y los nuevos que obtengamos, hasta que sea de grado uno o no se pueda descomponer en factores reales.

ACTIVIDADES

1. Factoriza el polinomio P(x) e indica sus raíces.

   $$P(x) = 3x^4 - 6x^2$$

2. Utiliza las identidades notables para factorizar los siguientes polinomios, y halla sus raíces.

   a) $Q(x) = 9x^2 - 12x + 4$

   b) $R(x) = 4x^4 + 12x^2 + 9$

   c) $S(x) = 6x^2 - 24$

3. Descompón en factores el siguiente polinomio.

   $$P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

4. Factoriza el siguiente polinomio

   $$P(X) = 6x^5 - 5x^4 - 11x^3 + 13x^2 - 3x$$

7. FRACCIONES ALGEBRAICAS

Una fracción algebraica es el cociente de dos polinomios y se representa por:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad Q(x) \neq 0$$

P(x) es el numerador y Q(x) el denominador.

Fracciones algebraicas equivalentes

Dos fracciones algebraicas

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \text{ y } \frac{R(x)}{S(x)}$$

son equivalentes, y lo representamos por:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$$

si se verifica que P(x) · S(x) = Q(x) · R(x).

Dada una fracción algebraica, **si multiplicamos el numerador y el denominador** de dicha fracción **por un mismo polinomio distinto de cero, la fracción algebraica resultante es equivalente a la dada.**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) \cdot M(x)}{Q(x) \cdot M(x)} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) : M(x)}{Q(x) : M(x)}$$

Simplificación de fracciones algebraicas

Para simplificar una fracción algebraica se divide el numerador y el denominador de la fracción por un polinomio que sea factor común de ambos.

Reducción de fracciones algebraicas a común denominador

Dadas dos fracciones algebraicas, reducirlas a común denominador es encontrar dos fracciones algebraicas equivalentes con el mismo denominador.

1Descomponemos los denominadores en factores para hallarles el mínimo común múltiplo, que será el común denominador.

2Dividimos el común denominador entre los denominadores de las fracciones dadas y el resultado lo multiplicamos por el numerador correspondiente.

ACTIVIDADES

1. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

   a) $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

   b) $\frac{4x^3-4x}{x+1}$

   c) $\frac{2x^4-5x^3+x^2+5x-3}{2x^3-x^2-7x+6}$

   d) $\frac{x^3-a^3}{x^3+ax^2+a^2x}$

2. Calcula y simplifica

   a) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x+1}{x+2}-\frac{6}{x^2+x-2}$

   b) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{2x-5}{3x}+2x$

8. OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

Suma y diferencia de fracciones algebraicas

Fracciones algebraicas con igual denominador

La suma de fracciones algebraicas con el mismo denominador es otra fracción algebraica con el mismo denominador y cuyo numerador es la suma de los numeradores.

Fracciones algebraicas con distinto denominador

En primer lugar se ponen las fracciones algebraica a común denominador, posteriormente se suman los numeradores.

Producto de fracciones algebraicas

El producto de dos fracciones algebraicas es otra fracción algebraica donde el numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores.

Cociente de fracciones algebraicas

El cociente de dos fracciones algebraicas es otra fracción algebraica con numerador el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda, y con denominador el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

ACTIVIDADES

1. Calcula y simplifica

   a) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x+1}{x+2}-\frac{6}{x^2+x-2}$

   b) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{2x-5}{3x}+2x$

2. Calcula y simplifica

   $$\frac{2x^3-4x^2+2x}{x^2+10x+25}\cdot\frac{x+5}{4x^3-4x}$$

3. Calcula y simplifica

   $$\frac{1+\frac{2x+1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x+1}}$$